INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA DE LAS DERIVADAS DIRECCIONALES DE FUNCIONES REALES DE DOS VARIABLES MEDIANTE EL USO DEL PROGRAMA DPGRAPH

J. Alberto Conejero Casares, Esther Sanabria Codesal

Facultad de Informática

Universidad Politécnica de Valencia

aconejero@mat.upv.es, esanabri@mat.upv.es

RESUMEN

En esta comunicación abordamos desde el punto de vista gráfico la interpretación geométrica de las derivadas direccionales mediante el programa DPGraph.

1. MOTIVACIÓN

La deficiente visión geométrica que observamos, cada vez más acentuada, en los alumnos de primeros cursos de las enseñanzas técnicas es el acicate que nos impulsa a realizar este trabajo. Puesto que, desde nuestro punto de vista, esta deficiencia perjudica notablemente la comprensión de conceptos tanto matemáticos y como físicos que constituyen herramientas fundamentales para la formación de sólidos profesionales.

En el caso particular de los alumnos de informática, nos parece de vital importancia a la hora de diseñar entornos gráficos y animaciones.

Por este motivo, en el presente trabajo nos centramos en la representación e interpretación de fenómenos relacionados con las funciones de varias variables (huyendo de un enfoque meramente calculístico) como el estudio de las derivadas direccionales, puesto que su interpretación geométrica es muy visual y su comprensión es clave para entender la generalización del concepto de derivada al pasar de funciones reales de una a varias variables.

2. HERRAMIENTAS

La herramienta básica que hemos utilizado para alcanzar este objetivo es el DPGraph, programa diseñado por David Parker para la visualización de conceptos matemáticos y físicos. Este programa resulta muy interesante desde el punto de vista docente, puesto que tiene una sintaxis muy sencilla y una gran calidad en sus gráficos. Permite además animar las imágenes y cambiar el punto de vista desde donde las observamos, con mayor facilidad que otros paquetes matemáticos disponibles, sin tener que recurrir a comandos adicionales. Al estar programado en ensamblador, la ejecución de las gráficas es muy rápida, permitiendo aumentar mucho la resolución.

La Universidad Politécnica de Valencia tiene licencia del programa DPGraph para todos los alumnos y profesores, tanto dentro de la institución como en sus ordenadores privados, lo que constituye una ventaja añadida, por su amplia disponibilidad.

3. DESCRIPCIÓN DEL TRABAJO REALIZADO

En el material elaborado, en primer lugar le recordamos al alumno los conocimientos teóricos expuestos en clase, como la definición e interpretación geométrica de la derivada para funciones reales de una variable, observando que tanto la definición de derivada parcial, como la de derivada direccional son la generalización más natural de este concepto para funciones reales de varias variables.

3.1. Preliminares.

En este apartado resumimos las definiciones y fórmulas necesarias, que el alumno ya conoce, para realizar este trabajo.

3.1.1 Derivadas de funciones reales de una variable.

La derivada de una función real de una variable y = f(x) en un punto x_0 del dominio mide la variación en el incremento de la función, que denotaremos por Δy, alrededor del punto $f(x_0)$ respecto de la variación en el incremento de la variable Δx alrededor del punto x_0, es decir, estudia el cociente:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Por tanto, dada una función $f : D \subseteq R \to R$, de dominio D, calculando su derivada en $x_0 \in D$ estudiamos la variación de y = f(x), cuando nos acercamos al punto x_0 desde otro punto cercano $x \in D$ sobre el eje OX. Este eje, que en este caso coincide con el dominio, podemos representarlo en el plano como la recta dada por la ecuación paramétrica:

$$\begin{cases} x = x_0 + t \\ y = 0 \end{cases}.$$

Luego medir los incrementos Δx alrededor del punto x_0 es equivalente a estudiar la distancia entre cada x y x_0, es decir, medir la variación del parámetro del eje OX, dado por $t = x - x_0$.

Así, la derivada viene dada como el límite:

$$f'(x_0) = \underset{x \to x_0}{Lim} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \underset{t \to 0}{Lim} \frac{f(x_0 + t) - f(x_0)}{t}.$$

Por otro lado, recordamos que la interpretación geométrica de la derivada, corresponde a la pendiente de la recta tangente a la curva, dada por la gráfica de y = f(x), en el punto $(x_0, f(x_0))$.

3.1.2. Derivadas direccionales de funciones reales de dos variables.

Esta idea se puede generalizar cuando consideramos funciones reales de varias variables.

Dada una función real de dos variables $f: D \subseteq R^2 \to R$, de dominio D y dado un vector unitario u = (u_x, u_y)[1], estudiaremos la variación de la función de dos variables z = f(x, y), esto es Δz, cuando nos acercamos en el dominio al punto (x_0, y_0) desde otro punto cercano (x, y) en la dirección del vector u, es decir, cuando nos acercarnos al punto (x_0, y_0) a través de la recta que viene dada por la siguiente ecuación paramétrica en el espacio:

$$\begin{cases} x = x_0 + t u_x \\ y = y_0 + t u_y . \\ z = 0 \end{cases}$$

Esto se traduce sobre la gráfica de la función (que en este caso es una superficie) en acercarnos al punto $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ a través de la curva espacial que tiene por ecuación paramétrica:

$$\begin{cases} x = x_0 + t u_x \\ y = y_0 + t u_y \\ z = f(x_0 + t u_x, y_0 + t u_y) \end{cases}$$

Del mismo modo que en el caso de funciones de una variable, analizaremos la relación entre:

- Δt, siendo t, el parámetro de la recta, es decir, la distancia entre los puntos (x, y) y (x_0, y_0) del dominio, y
- Δz, el incremento de la función z = f(x, y).

Es decir, el conciente:

$$\frac{\Delta z}{t} = \frac{f(x_0 + t u_x, y_0 + t u_y) - f(x_0, y_0)}{t}.$$

Observamos que al ser el vector u unitario, la distancia entre los puntos (x_0, y_0) y $(x, y) = (x_0 + t u_x, y_0 + t u_y)$ viene dada por $|t|$, al igual que ocurre en el caso real.

Por tanto, la derivada direccional de la función z = f(x, y) en el punto (x_0, y_0) y en la dirección u viene dada por el límite:

$$D_u f(x_0, y_0) = \lim_{t \to 0} \frac{f(x_0 + t u_x, y_0 + t u_y) - f(x_0, y_0)}{t}$$

Observamos que para encontrar la derivada direccional estamos calculando el límite de una función real que depende de una única variable t.

---

[1] Recordamos que u es un vector unitario si y sólo si $|u| = 1$.

3.1.3. Fórmula de la derivada direccional

Dado un vector unitario u y el vector gradiente de la función z = f(x, y) en el punto (x_0, y_0), que denotamos por $\nabla f(x_0, y_0)$, podemos calcular la derivada direccional asociada al vector u en dicho punto, realizando el producto escalar del gradiente con u.

Sean $f : D \subseteq R^2 \to R$ una función diferenciable en un conjunto abierto D, donde $(x_0, y_0) \in D$ y u = (u_x, u_y) es un vector unitario.
La derivada direccional de la función z = f(x, y) en el punto (x_0, y_0) con respecto al vector unitario u viene dada por:

$$D_u f(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \cdot u_x + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \cdot u_y = \nabla f(x_0, y_0) \bullet (u_x, u_y),$$

donde $\bullet$ denota el producto escalar.

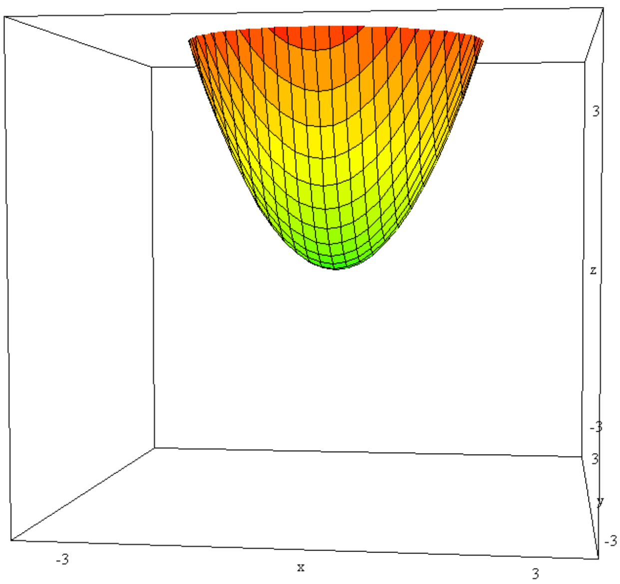
3.2. Desarrollo de la práctica

Utilizando como base estos conocimientos teóricos, dividimos el trabajo de la sesión práctica en los siguientes apartados:

3.2.1. Interpretación geométrica de la derivada direccional

En primer lugar dibujamos las gráfica de la función de dos variables z = f(x, y), para visualizar la superficie sobre la que trabajamos. En este caso particular, trabajaremos con la función z = x^2 + y^2, cuya gráfica determina un Paraboloide elíptico.

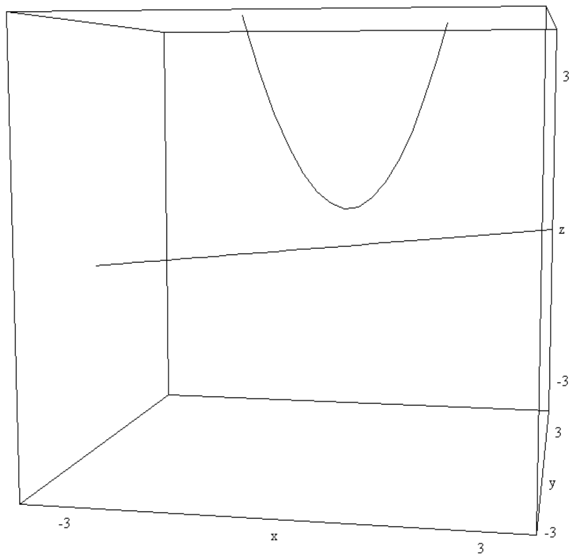
graph3d(rectangular(u, v, u^2+ v^2))



A continuación realizamos las secciones de la gráfica con los planos XZ e YZ que pasan por el punto (x_0, y_0, 0), para obtener las curvas espaciales sobre la gráfica, cuyas pendientes vienen dadas por las derivadas parciales en (x_0, y_0). En este caso trabajaremos sobre el punto (1,0).

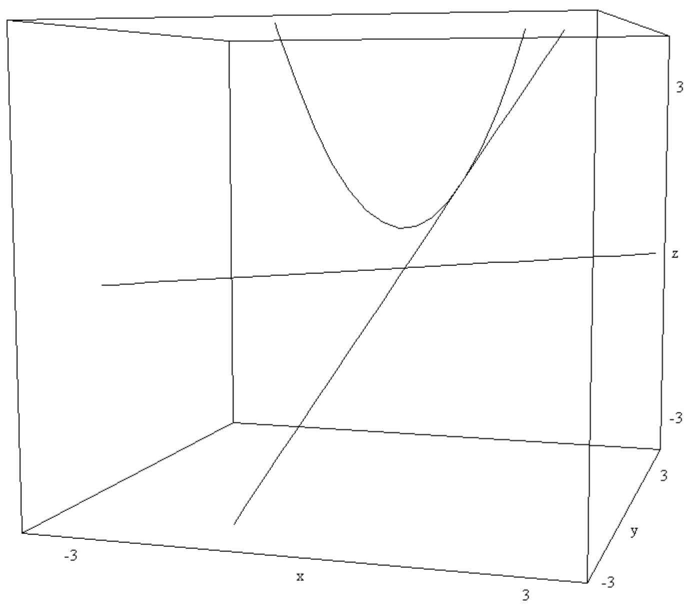
Análogamente obtendremos las secciones con el resto de planos perpendiculares al plano XY que pasan por (1, 0, 0), determinados por las distintas direcciones unitarias alrededor de dicho punto. Estos planos están generados por los vectores (u_x, u_y,0) y (0,0,1).

graph3d((rectangular(u, u-1,0), rectangular(u, u-1, u^2 + (u-1)^2)))



Las curvas contenidas en la superficie que resultan de esta intersección son llamadas curvas coordenadas en la dirección u= (u_x, u_y). Del mismo modo que en el caso anterior, las curvas coordenadas en una determinada dirección u se caracterizan por tener como pendiente la derivada direccional en dicha dirección.

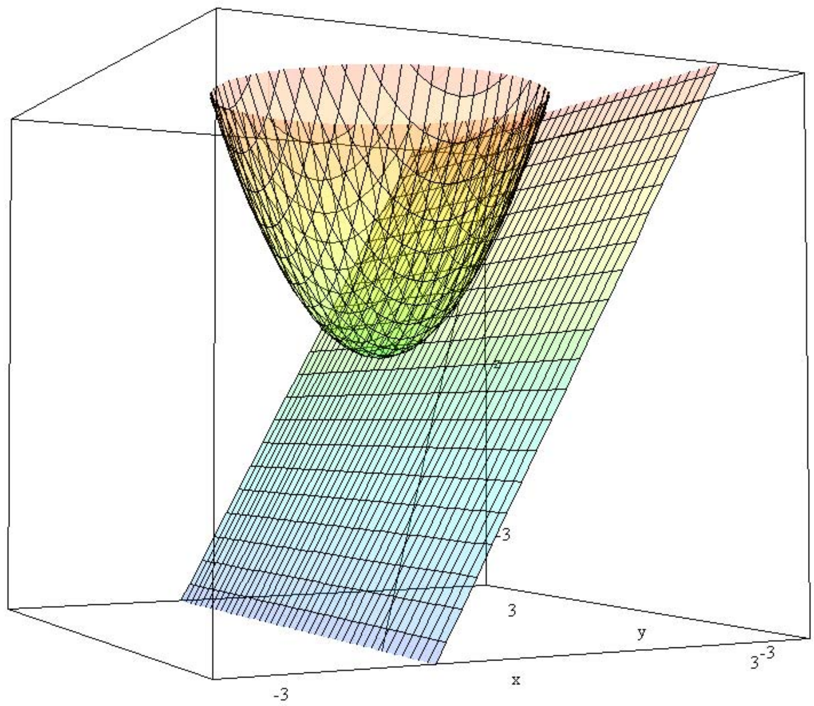
graph3d((rectangular(u, u-1,0) , rectangular (u, u-1, u^2+(u-1)^2) , rectangular(u, u-1, 2*u-1)))



3.2.2 El plano tangente

En segundo lugar, pedimos al alumno que dibuje el plano tangente a la gráfica de la función z = f(x, y) en un punto (x_0, y_0, f(x_0, y_0)), que en nuestro caso será (1, 0, f(1, 0))=(1, 0, 1), y observamos que las rectas tangentes de las curvas coordenadas en cada dirección u en este punto, generan dicho plano.

```
graph3d.transparency:=0.8
a.minimum:=-4
a.maximum:=4
graph3d((rectangular ( u, a*(u-1), 2*u-1), rectangular( u, v, 2*u-1),
rectangular ( u, v, u^2 + v^2) ))
```

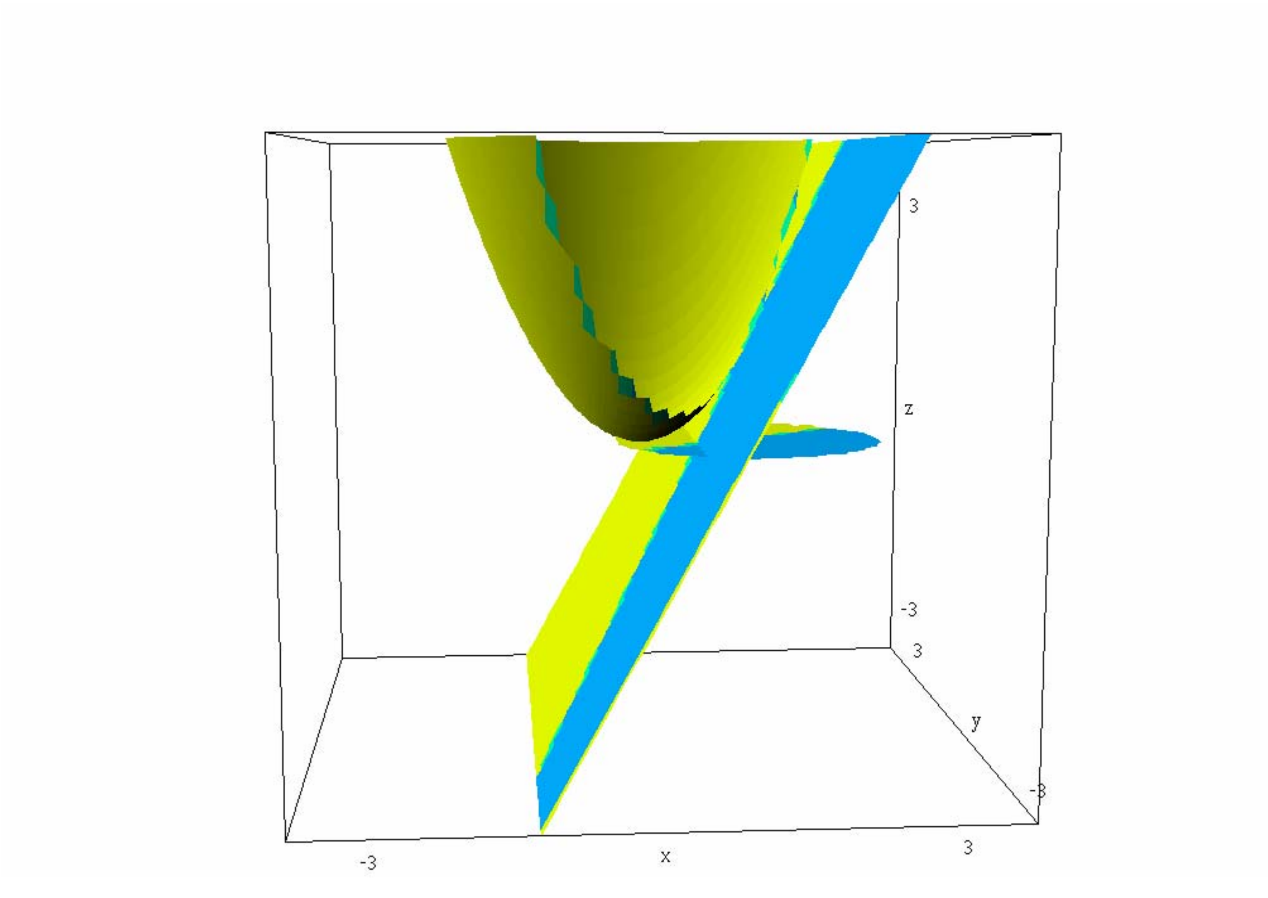


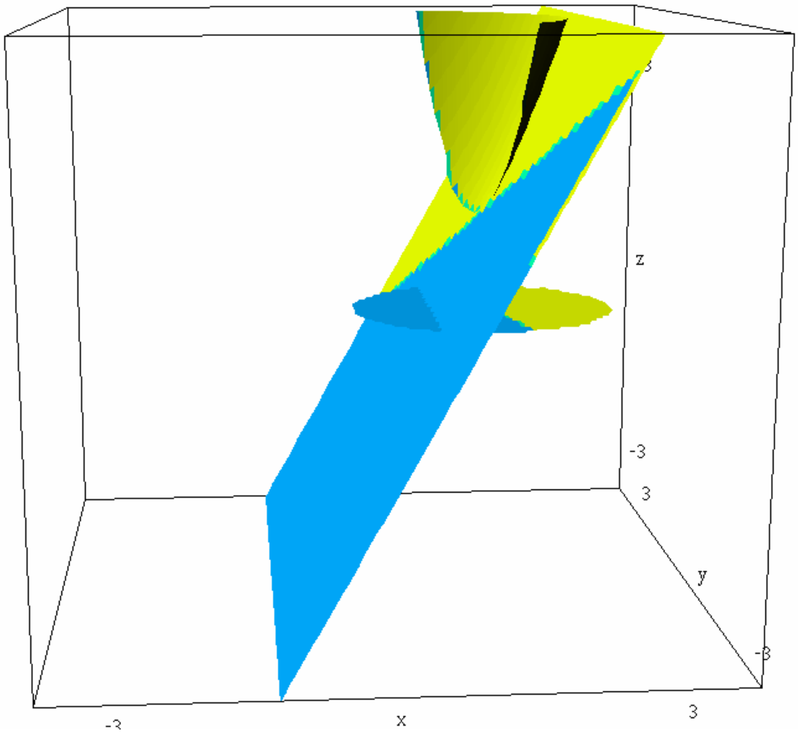
3.2.3 Más tangencias

Por último, les indicamos los pasos que deben seguir para hacer una animación que refleje todo lo anterior.

Fijando un punto (x_0, y_0) del dominio de la función z = f(x, y), conseguimos que variando las distintas direcciones alrededor del punto dado, se observen sobre la superficie, generada por la gráfica de la función, las curvas coordenadas en cada dirección, así como sus correspondientes rectas tangentes sobre el plano tangente de la superficie en el punto (x_0, y_0,f(x_0, y_0)).

```
graph3d.mesh:=false
graph3d.color:=0.1+0.1*sign(v-a*(u-1))+0.1*sign(v-a*(u-1)-0.1)+0.5*sign(-(u-1)^2-v^2+0.025)
graph3d.transparency:=0
graph3d.contrast:=1
graph3d.resolution:=60
graph3d.stepsu :=150
graph3d.stepsv:=50
graph3d.shading:=1
a.minimum:=-4
a.maximum:=4
graph3d((rectangular(u,a*(u-1),u^2+(a*(u-1))^2),
rectangular(u*nonneg(-(u-1)^2-v^2+1.5),v*nonneg(-(u-1)^2-v^2+1.5),0),
rectangular(u,v,2*u-1), rectangular(u,v,u^2+v^2*nonneg(v-a*(u-1)))))
```





2. CONCLUSIONES

Este trabajo está dirigido a facilitar el aprendizaje del concepto de derivada direccional desde un punto de vista constructivo, a través de la manipulación del programa DPGraph, que facilita la visualización de las superficies, de las curvas coordenadas en cada dirección, de las rectas tangentes cuyas pendientes vienen determinadas por las derivadas direccionales, así como del plano tangente generado por todas ellas.

Entendemos que la interacción con todos estos fenómenos, ayudan al alumno a asimilar esta generalización de la derivada de funciones reales de una variable y a enriquecer su visión tridimensional, así como a integrarla como una herramienta más, en sus razonamientos.

3. REFERENCIAS

- Madrigal Muga, J., Proyecto Descartes Un enfoque interactivo en el aprendizaje de las matemáticas. Jornadas “Las matemáticas y sus aplicaciones: un reto en la enseñanza actual”. Enero 2002, Valencia. Programa Descartes http://www.pntic.mec.es/Descartes/

- Thomas, G. B. y Finney R. L., Cálculo de Varias Variables, Ed. Addison-Wesley .

- El programa DPGraph, está accesible en http://www.dpgraph.com